

Análisis Cualitativo por Simulación de un Flujo Continuo Incompresible Restringido Empleando SPH y Superficies de Frontera

Gabriel Reyes-Alemán^a, Ernesto Olguín-Díaz^a, Luis Gerardo De la Fraga^b

^aCinvestav, Grupo de Robótica y Manufactura Avanzada, ^bCinvestav, Departamento de Computación
gabriel.reyes.aleman@gmail.com, ernesto.olguin@gmail.com, fraga@cs.cinvestav.mx

Teléfono cel: (844)-1268880

Resumen—Se presenta un tipo de modelado para las condiciones de frontera entre un fluido incompresible y su contenedor rígido de simetría cilíndrica, así como el estudio de las propiedades del modelo en función al número de puntos de integración llamados partículas. El movimiento del fluido es modelado mediante el método conocido como *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), que representa de manera general las ecuaciones de fluidos de Navier-Stokes, con simplificaciones apropiadas para un manejo computacional eficiente. El recipiente utilizado, consiste en una sección de tubo, sometido a una fuerza constante de tipo gravitacional, paralela a su eje principal. La frontera entre el fluido y el recipiente es modelada como una restricción no-holónoma, con rigidez y amortiguamiento, donde las partículas chocan. Los resultados a nivel simulación, muestran un comportamiento cualitativo equivalente al comportamiento de un fluido real, lo que permite analizar fenómenos complicados de observar en el sistema físico.

Palabras clave: Modelado de Fluidos, Hidrodinámica de Partícula Suavizada, Modelo SPH, Dinámica Computacional de Fluidos, CFD.

I. INTRODUCCIÓN

El comportamiento dinámico de los fluidos y su interacción es un importante problema de estudio, debido a que los fluidos en movimiento están presentes en muchos de los fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza.

Modelar fluidos mediante una expresión analítica que describa su comportamiento, es una tarea altamente compleja. Esto se debe a que las ecuaciones que rigen el movimiento de los fluidos no son lineales, además, están expresadas en función de derivadas parciales.

Por otra parte, avances en algoritmos computacionales, han permitido aproximar numéricamente los fenómenos dinámicos de los fluidos. La Dinámica Computacional de Fluidos (CFD por sus siglas en inglés) [1], es una rama de la mecánica de fluidos que se encarga del estudio de métodos numéricos para aproximar una solución de las ecuaciones que describen la dinámica de los fluidos.

Generalmente los métodos basados en mallas resultan en un alto costo computacional. Por esta razón se adaptó un modelo que es considerado libre de malla, con la finalidad de resolver las ecuaciones de fluidos de forma más eficiente. Una malla es la discretización del dominio del fluido, que

se utiliza para resolver la dinámica mediante diferencias finitas. El SPH es un método de interpolación basado en la integración de Monte Carlo, el cual fue desarrollado inicialmente para analizar fenómenos astrofísicos [2]. Posteriormente fue adaptado para simulaciones de fluidos incompresibles ofreciendo la posibilidad de reproducir efectos dinámicos complejos, bajo condiciones que físicamente sería complicado reproducir.

En este trabajo presentamos el análisis mediante simulación del flujo de un fluido dentro de un cilindro rígido, el cual se analiza en dos dimensiones. El análisis es realizado variando el número de partículas. Las condiciones de frontera son modeladas mediante superficies de frontera [3], el cual fue aplicado para el caso de tres dimensiones, sin embargo, en este trabajo se empleó su simplificación a dos dimensiones debido a que sólo se analiza el comportamiento del fluido, por esta razón la superficie cilíndrica, es reducida a un área rectangular.

El resto del documento está organizado de la siguiente manera. En las secciones II y III se presentan las herramientas de modelado usadas para implementar el simulador numérico. Posteriormente, en la sección IV se muestran los resultados que se obtuvieron con el simulador numérico, esto es, los efectos en presión/velocidad y tiempo de cómputo que representa la variación de número de partículas en el sistema. Las discusiones finales son presentadas en la sección V.

II. DINÁMICA DE FLUIDOS USANDO SPH

El SPH es un método que nace de una representación lagrangiana de las ecuaciones de Euler para fluidos. Este método se fundamenta en una técnica de interpolación basada en una función denominada Kernel. Su expresión es similar a las ecuaciones de Navier-Stokes y surgen de las ecuaciones de Euler despreciando los términos viscosos y escribiéndolas para un fluido compresible. Estas ecuaciones se adaptan a una forma integral para representar el fluido mediante un conjunto finito de partículas o puntos de integración [4].

De manera similar al formalismo de Euler-Lagrange, usado para sistemas mecánicos, el SPH contempla de

igual forma los términos inerciales, disipativos y fuerzas potenciales. La diferencia radica en que estas ecuaciones están expresadas en términos de presión (donde las fuerzas son normalizadas en un área determinada), en lugar de expresarse en términos de fuerzas generalizadas.

Representación integral

Sea una función $f(x)$, la cual puede ser integrada utilizando una función de suavizado o Kernel representada por W de la siguiente forma:

$$\langle f(r) \rangle = \int_v f(r') W(r - r', h) dV' \quad (1)$$

donde h es la distancia entre partículas, mejor conocido como largo de suavizado. Si el kernel se elige de modo que sea similar a una delta de Dirac, es decir $\delta(x - x')$, entonces se puede tomar en cuenta la siguiente representación.

$$\langle f(r) \rangle = \int_v f(r) \delta(r - r') dV' = f(r) \quad (2)$$

Lo cual se puede aplicar a una derivada espacial, mediante la ecuación 1,

$$\langle \nabla f(r) \rangle = \int_v [\nabla' f(r')] W(r - r', h) dV' \quad (3)$$

De esta manera, integrando por partes la ecuación anterior y despreciando los términos que se encuentran fuera del soporte del kernel se obtiene lo siguiente.

$$\langle \nabla f(r) \rangle = - \int_v f(r') [\nabla' W(r - r', h)] dV' \quad (4)$$

Kernel

La función kernel, comprende un filtro de partículas que determina la interacción entre partículas de forma suavizada, esto es, es capaz de determinar la magnitud de interacción entre una partícula y un conjunto finito de partículas que se encuentran dentro de un soporte compacto. Esta función es usada para interpolar los efectos dinámicos del fluido en función de la contribución que tienen las partículas vecinas respecto a una partícula i-ésima, interpolando así las variables de interés contenidas en las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido.

Existen diferentes alternativas para representar esta función, sin embargo, está demostrado que a medida que esta función tiende a una función delta de Dirac, el grado de aproximación de dicha función tiende a ser más preciso. Esto se debe a que a medida que cumple con ciertas propiedades, cada partícula puede considerarse como un cuerpo rígido cuyos parámetros dinámicos se concentran en un punto infinitesimalmente pequeño, estas propiedades son:

1. Debe presentar simetría a medida que $r \rightarrow 0$, mientras que la función delta de Dirac disminuye cuando el límite de h se aproxima a cero.
2. La norma de la función debe ser igual a uno.
3. El valor del kernel debe ser cero a medida que $W(|r| > 2h)$ (soporte compacto).

4. El comportamiento debe ser monótono decreciente $\dot{W} < 0$.

Aplicación del SPH a las ecuaciones de Navier-Stokes

Como se mencionó anteriormente en el SPH el fluido se representa mediante un conjunto finito de partículas, donde cada partícula p_i posee una masa m_i y ocupa un volumen V . Por la ley de conservación de masa, dicho volumen se puede expresar en términos de la densidad y la masa alrededor de p_i de la siguiente forma.

$$V = \sum \frac{m_i}{\rho_i} \quad (5)$$

Expresando en forma integral la ecuación anterior y analizando alrededor de la partícula p_i se puede llegar a lo siguiente.

$$\langle f_i \rangle = \langle f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \frac{f_j}{\rho_j} W_{ij} \quad (6)$$

$$\langle \nabla_i f \rangle = \langle \nabla f(x_i) \rangle = \sum_{j=1}^N m_j \frac{f_j}{\rho_j} \nabla W_{ij}, \quad (7)$$

De este modo, note que la integral queda definida como una sumatoria de las contribuciones de los volúmenes discretos alrededor de cada partícula.

Aproximación de la densidad: La densidad puede expresarse en forma suavizada aplicando la aproximación de la ecuación (7) en función de la densidad, con lo que se obtiene:

$$\rho_i = \sum_{j=1}^N m_j W_{ij} \quad (8)$$

Ecuación de conservación de masa: La ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad puede definirse de la siguiente a partir de la siguiente ecuación.

$$\frac{dp}{dt} + \rho \nabla \cdot v = 0 \quad (9)$$

La ecuación anterior puede expresarse en forma suavizada, lo cual resulta en la siguiente expresión:

$$-\rho \nabla \cdot v = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{\rho_j} v_j \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (10)$$

Ecuación de conservación de momento: La ecuación de conservación de momento, la cual expresada para un fluido no viscoso y en la ausencia de la gravedad esta determinada por la ecuación de Euler:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \quad (11)$$

Sin embargo, se puede usar una expresión en función del gradiente de presión que determina las aceleraciones de las partículas, las cuales, si son normalizadas en función de la masa de las partículas representan las fuerzas que actúan en

ellas. La siguiente expresión garantiza la conservación de momento lineal y angular.

$$\frac{\nabla P}{\rho} = \nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{P}{\rho^2} \nabla \rho \quad (12)$$

Partiendo de la ecuación (12) se puede expresar la aceleración de la partícula i en función de las fuerzas producidas por la presión:

$$\frac{d}{dt} v_i = - \sum_{j=0}^N m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i} + \frac{p_j}{\rho_j} \right) \cdot \nabla_i W_{ij} \quad (13)$$

En este caso, las fuerzas externas son normalizadas en relación a la masa de las partículas, por lo que resultan en aceleraciones externas.

Viscosidad artificial: Las ecuaciones descritas anteriormente fueron deducidas considerando un fluido no viscoso lo cual implica que es necesario añadir un término que represente la disipación de energía en forma de calor. Este término se conoce como viscosidad artificial y permite modelar fluidos Newtonianos como no Newtonianos [5], este término puede tomar la siguiente forma:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha \hat{c}_{i,j} \mu_{i,j} + \beta \mu_{i,j}^2}{\hat{\rho}_{i,j}} & \text{para } v_{ij} \cdot r_{ij} \\ 0 & \text{para otro caso,} \end{cases} \quad (14)$$

en donde:

$$\begin{aligned} \mu_{i,j} &= \frac{h v_{ij} \cdot r_{ij}}{r_{i,j}^2 + 0,001h * 2} \\ \hat{\rho}_{i,j} &= \frac{1}{2} (\rho_i + \rho_j) \\ \hat{c}_{ij} &= \frac{1}{2} (c_i + c_j) \end{aligned}$$

donde \hat{c}_{ij} es el promedio de la velocidad del sonido, α y β son constantes de viscosidad y amortiguamiento cuyos valores se encuentran entre 0.1 y 0.01. Para un flujo laminar o turbulento estos valores cambian entre 0 y 1.

Ecuación de estado: Para fluidos compresibles y pseudo-incompresibles la presión y densidad están relacionadas a través de una ecuación denominada de estado. Esta ecuación modela los efectos de los cambios en la presión y en la densidad de los fluidos, por lo que para el agua se considera un fluido ligeramente compresible. La ecuación de estado empleada en este trabajo es la siguiente:

$$p = k \left(\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (15)$$

donde k se define en función de la velocidad del sonido c_s como:

$$k = \frac{\rho_0 c_s^2}{\gamma} \quad (16)$$

La ecuación 15, introduce en el sistema cambios grandes en presión ante cambios ligeros en la densidad tal y como ocurre en fluidos como el agua.

III. CONDICIONES DE FRONTERA

En este trabajo se modelan las condiciones de frontera mediante una superficie de frontera, la cual a diferencia de las partículas de frontera (partículas con aceleración, posición y velocidad nula) requiere un costo computacional menor. Esta formulación se encuentra documentada en[3].

La fuerza de contacto puede ser modelada por las componentes ortogonales de la misma, esto es, descomponiendo la fuerza de contacto en una componente normal y otra tangencial, es decir, $\mathbf{f}_c = \mathbf{f}_d + \mathbf{f}_f \in \mathbb{R}^3$. \mathbf{f}_c es la fuerza de contacto, \mathbf{f}_d es la componente de fuerza correspondiente a los esfuerzos de deformación normal y \mathbf{f}_t son los esfuerzos tangenciales, es decir, los esfuerzos de fricción. Ambas componentes de fuerza son ortogonales entre sí y recuperan la fuerza de deformación, disipación (debida al esfuerzo tangencial) y la dirección de la fuerza.

Operador Normal: Sea $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = 0$ una función que determina una superficie cualquiera contenida en un espacio euclidiano tridimensional y $\mathbf{p}_c \in \mathbb{R}^3$ un punto en la superficie donde ocurre el contacto. La dirección normal (vector normal de la superficie en el punto de contacto λ_N) puede expresarse en términos del **gradiente normalizado en la superficie**, (ver figura 1).

$$\lambda_N = \frac{\nabla_s(\mathbf{p}_c)}{\|\nabla_s(\mathbf{p})\|}, \quad \|\lambda_N\| = 1. \quad (17)$$

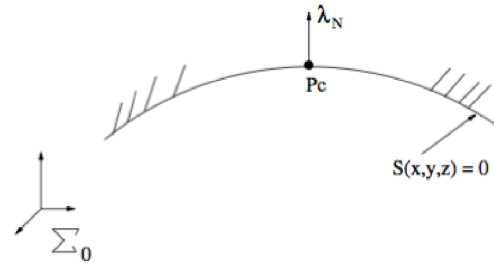


Figura 1. Esquema de la fuerza normal a la superficie

La posición relativa de la partícula al chocar con la superficie se puede definir como $\mathbf{x} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_c$, donde \mathbf{p} es la posición de la partícula en \mathbb{R}^3 . La posición \mathbf{x} en la dirección normal puede calcularse mediante la magnitud de la deformación en función de la dirección del vector normal unitario,

$$\mathbf{x}_N = \|\mathbf{x}\| \lambda_N = \lambda_N \|\mathbf{x}\|. \quad (18)$$

La magnitud de este vector se obtiene proyectando el vector de deformación en la dirección normal a la superficie,

$$\mathbf{x}_N = \lambda_N \lambda_N^T \mathbf{x} = [\lambda_N \lambda_N^T] \mathbf{x}, \quad (19)$$

donde la proyección normal queda simplemente en términos de la dirección normal de esta y no de la curvatura de la superficie. La figura 2 muestra las componentes de la deformación entre una partícula y la superficie.

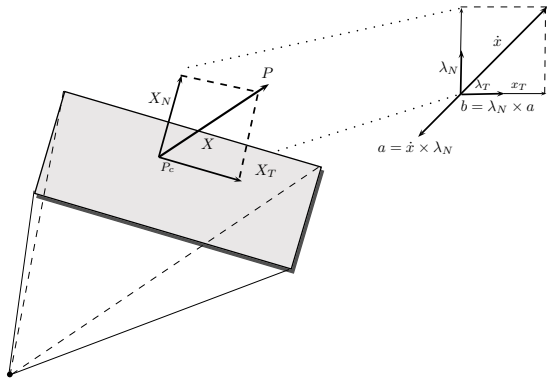


Figura 2. Esquema de la fuerza de deformación

Operador Tangencial: Sea $T : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ una operador lineal que obtenga la proyección tangencial de los vectores de velocidad en la superficie o de la componente normal de la deformación, dicho operador debe ser de la forma:

$$\dot{x}_T = T \dot{x} \quad (20)$$

Este operador se puede definir de manera similar que el operador normal expresado en la ecuación (17), por lo que el operador tangencial resulta en lo siguiente:

$$T = \lambda_T \lambda_T^T \quad (21)$$

Entonces, el vector unitario en la dirección tangencial puede definirse como:

$$\lambda_T = \frac{\dot{x}_T}{\|\dot{x}_T\|} \quad (22)$$

Por consiguiente, los operadores N y T deben ser ortogonales entre sí y deben cumplir las siguientes propiedades:

$$NT = TN = [0] \quad \text{y} \quad N + T = I \quad (23)$$

Por lo que el operador tangencial queda definido como:

$$T = -[\lambda_N \times]^2 \quad (24)$$

Fuerza de Deformación Normal: La fuerza de deformación normal en la superficie puede modelarse como un sistema de segundo orden. Esta fuerza es producida por la colisión de una partícula con masa m_p con una superficie s en un punto p_c con una velocidad \dot{x} de la siguiente forma:

$$f_p = k_s x_N + b_s \dot{x}_N \quad (25)$$

donde la constante k_s corresponde a un coeficiente de restitución elástica y b_s un coeficiente de disipación, las variables x_N , \dot{x}_N son la proyección normal de la posición y velocidad respectivamente de la partícula en el punto de contacto.

De acuerdo a la segunda ley de Newton la fuerza de reacción que actúa sobre la partícula por la acción de la superficie es la siguiente:

$$f_d = -[\lambda_N \lambda_N^T](k_s x + b_s \dot{x}) \quad (26)$$

Una consideración importante para modelar superficies no restitutivas es considerar el coeficiente b_s lo suficientemente pequeño tomando en cuenta la restricción $b_s \ll 2\sqrt{k_s m_p}$.

Por otra parte la fuerza de fricción tangencial puede modelarse como una fuerza de Coulomb considerada en sentido contrario a la velocidad de contacto, dicha fuerza de fricción tangencial puede expresarse de la siguiente manera:

$$f_f = -\mu_k \|f_d\| (-\lambda_T) \quad (27)$$

donde μ_k es el coeficiente de fricción dinámica entre la partícula y la superficie y la dirección de f_f esta dada por la ecuación (22) por lo que la ecuación puede reescribirse de la siguiente forma:

$$f_f = -\mu_k \|f_d\| \frac{\dot{x}_T}{\|\dot{x}_T\|} \quad (28)$$

IV. RESULTADOS

Se realizó una serie de simulaciones, empleando las ecuaciones planteadas en la sección II-III, considerando un tubo cuyas dimensiones se muestran en la figura 3. Inicialmente las partículas se encuentran ordenadas entre sí, formando un mallado con ellas y ocupando todo el área de trabajo, el fluido se mueve por la acción de una fuerza horizontal que resulta similar a la aceleración de la gravedad. Al término de las simulaciones se graficó la velocidad promedio en el centro del tubo a lo ancho del mismo y la presión promedio dada al centro de la región longitudinal del tubo (ver figura 6). Las presiones están dadas en Pa y las velocidades se dan en m/s.

Este experimento muestra las variaciones cualitativas que sufre el fluido ante variaciones en el número de partículas. Los resultados muestran que al variar el número de partículas el fluido tiende a cambiar la distribución de velocidad, guardando un comportamiento cualitativo, es decir, la distribución de velocidad para caso es diferente, pero siempre se mantiene una parábola, lo cual corresponde a una distribución de velocidad, o perfil de velocidad para un flujo dentro de un tubo.

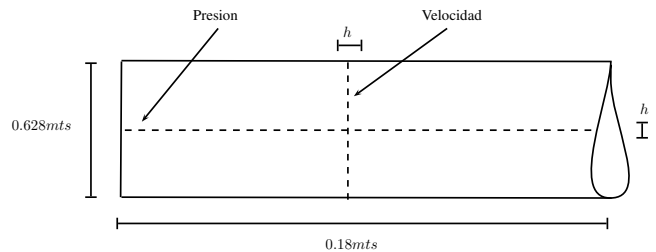


Figura 3. Dimensiones del tubo

Otra forma de analizar los cambios cualitativos que presenta el fluido ante variaciones en el número de partículas, se puede presentar al analizar el tiempo de establecimiento correspondiente a cada caso planteado, es decir, para los diversos números de partículas empleados en la simulación.

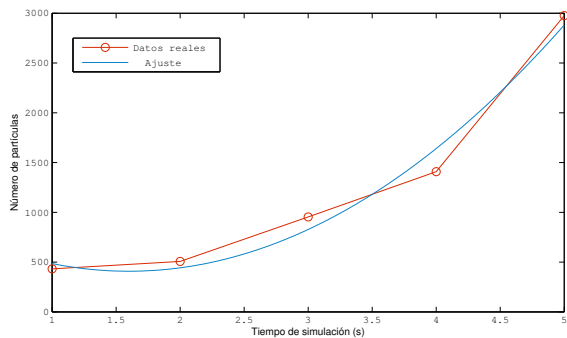


Figura 4. Tiempo de establecimiento para diferentes partículas de la velocidad promedio en el centro del tubo

La gráfica 4, muestra los resultados obtenidos, en donde se puede apreciar que en medida que el número de partículas aumenta, el tiempo de establecimiento también. Esto se debe principalmente a la búsqueda de partículas vecinas, por lo que si se desea un simulador que funcione correctamente de forma cualitativa, pero que sea lo más rápido posible, es necesario llegar a una equivalencia entre el comportamiento esperado para un número elevado de partículas y un número reducido, por ejemplo una equivalencia entre tres mil y trescientas partículas. Por esta razón resulta interesante hallar una equivalencia cualitativa entre una referencia, es decir, un número elevado de partículas, en este caso tres mil partículas y un número menor como se mencionó. Lo cual puede justificarse dado que los efectos dinámicos pueden considerarse representativos, como se mostró en la figura 6.

De acuerdo a los datos presentados en la sección anterior, figura 6, a medida que el fluido de control es discretizado en un número mayor de partículas, el fluido tiende a tomar una velocidad mayor al fluir dentro del tubo. Este efecto podría considerarse como un efecto producido por los cambios en densidad al aumentar el número de partículas. Esto es, que al discretizar el fluido de control en cada vez más partículas, la densidad y por lo tanto la masa de cada partícula tiende a dividirse también, por lo que a menor número de partículas la densidad para cada partícula tiende a ser mayor, lo que puede contemplarse como un problema de diseño de simulación, en la cual se abre una línea de investigación.

Este efecto se puede compensar, de forma cualitativa, modificando de forma arbitraria el modelo de viscosidad artificial, esto es, compensar el efecto que se presenta al emplear pocas partículas con la finalidad de obtener una respuesta similar en términos cualitativos de usar un número más alto de partículas. Los parámetros de viscosidad se escogieron de forma arbitraria guardando un criterio, el cual es asemejar la respuesta cualitativa del fluido bajo la respuesta obtenida por una referencia, es decir, la respuesta proporcionada por un número determinado de partículas, lo cual puede observarse en la figura en la figura 5.

V. CONCLUSIONES

Puede considerarse al método de SPH como una buena aproximación de la dinámica de fluidos, cuya ventaja radica en la eficiencia computacional que muestra a diferencia de los métodos eulerianos. Por esta razón, puede ser usado para modelar escenarios complejos en donde los fluidos interactúan con sistemas dinámicos complejos, como el caso de interfaces entre fluidos, cuerpos rígidos sumergidos en fluidos, o en general cualquier fenómenos que resulte complicado reproducir en ambientes de laboratorio.

Se desarrolló un simulador dinámico de fluidos basado en el método de SPH el cual se aplicó a la simulación del flujo de un fluido ligeramente compresible a través de un tubo. Los datos obtenidos se consideran satisfactorios dado que cualitativamente el fluido se comportó correctamente, esto es, que el fluido coincide de forma cualitativa con la solución exacta de un fluido que pasa a través de un tubo, lo cual numéricamente no necesariamente corresponda de forma exacta a esa solución.

Finalmente, el aporte de este trabajo radica en el análisis de las propiedades de un fluido modelado mediante SPH que se somete a un contenedor rígido, el cual se modeló definiendo superficies de contacto, es decir, superficies que presentan coeficiente de disipación y elasticidad. Estas superficies se pueden implementar para modelar incluso objetos deformables, debido a que el modelo de deformación es simple y cuenta con la ventaja que es más fácil evitar fugas del fluido, a diferencia del uso de partículas de frontera, las cuales consisten en partículas de fluido que tienen aceleración nula, en las cuales podría requerirse de un reacomodo de partículas con la finalidad de evitar fugas, para el caso de un objeto contenedor que se deforma.

VI. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue parcialmente apoyado por CONACYT. Becario: Gabriel Reyes Alemán, registro de CVU: 324907.

REFERENCIAS

- [1] J. Anderson, *Computational Fluid Dynamics, The Basics with Applications*. McGraw-Hill, 1995.
- [2] J. Monaghan and J. Lattanzio, "A Refined Method for Astrophysical Problems," *Astron. Astrophysics*, vol. 149, pp. 135–143, 1985.
- [3] L. G. de la Fraga, E. Olgún-Díaz, and F. García-Arreguín, "Efficient simulation of the fluid-structure interface.," *ICINCO-RA'09*, pp. 268–273, 2009.
- [4] J. Morris, "An overview of the method of smoothed particle hydrodynamics," 1995. Universitat Kaiserslautern. Internal Report.
- [5] M. Müller, S. Schirm, and M. Teschner, "Interactive blood simulation for virtual surgery based on smoothed particle hydrodynamics," *Technol. Health Care*, vol. 12, no. 1, pp. 25–31, 2004.
- [6] S. Premoze, T. Tasdizen, J. Bigler, A. Lefohn, and R. T. Whitaker, "Particle-based simulation of fluids," *EUROGRAPHICS*, vol. 22, no. 3, 2003.
- [7] T. M. Roy, "Physically-based fluid modeling using smoothed particle hydrodynamics," Master's thesis, University of Illinois at Chicago, 1995.
- [8] J. J. Monaghan, "Simulating Free Surface Flows with SPH," *Journal of Computational Physics*, vol. 110, pp. 399–406, 1994.
- [9] D. A. Fulk and D. W. Quinn, "An analysis of 1-d smoothed particle hydrodynamics kernels," *Journal of Computational Physics*, vol. 126, no. 1, pp. 165–180, 1996.

- [10] J. Hongbin and D. Xin, "On criterions for smoothed particle hydrodynamics kernels in stable field," *Journal of Computational Physics*, vol. 202, no. 2, pp. 699–709, 2005.
- [11] S. Schreir, *Compressible Flow*. Wiley-Interscience, 1982.
- [12] J. J. Monaghan, "Smoothed particle hydrodynamics," *Rep. Prog. Phys.*, vol. 68, pp. 1703–1759, 2005.
- [13] A. L. García, *Numerical Methods for Physics*. Prentice Hall, 2000.
- [14] H. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1999.
- [15] H. Goldstein, *Mecánica Clásica*. Editorial Reverté, S.A., 1987.

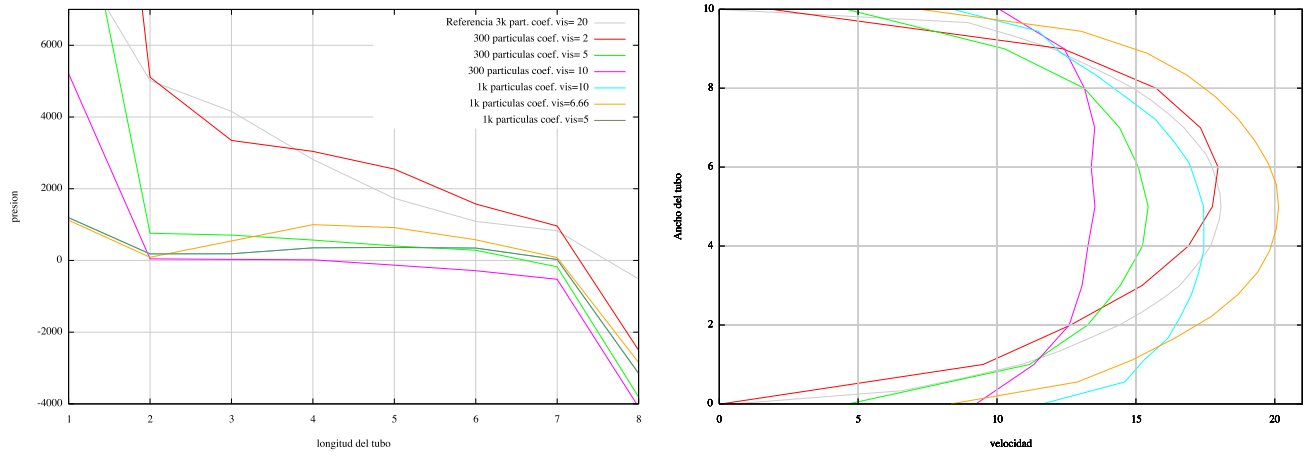


Figura 5. Compensación mediante modelo de viscosidad artificial

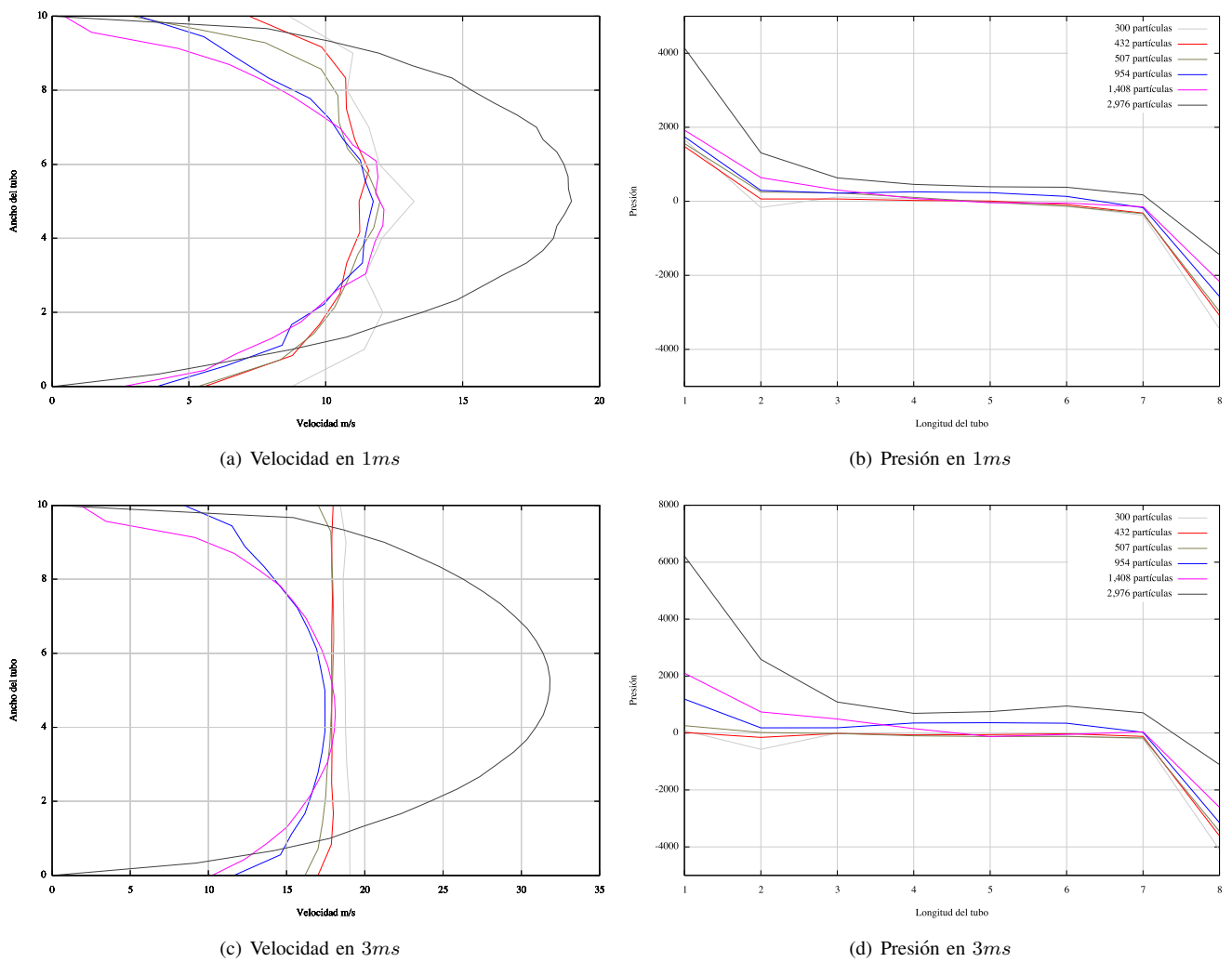


Figura 6. Gráficas de velocidad y presión promedio para diversos números de partículas